Lista 1 - Física II

Questão 1. *Considere o tubo com vasos comunicantes de mesma seção reta e preenchido com um fluido incompressível em equilíbrio no campo gravitacional terrestre como na Figura 1. Em três deles, há êmbolos aos quais são aplicados forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$. A linha pontilhada representa a altura do fluido no quarto vaso submetido à pressão atmosférica P_0. Sobre o módulo das forças aplicadas, podemos afirmar que*

(a) $|\vec{F}_3| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$

(b) $|\vec{F}_3| \geq |\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$

(c) $|\vec{F}_3| > |\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$

(d) $|\vec{F}_3| < |\vec{F}_2| < |\vec{F}_1|$

(e) $|\vec{F}_3| = |\vec{F}_2| < |\vec{F}_1|$

(f) $|\vec{F}_3| - |\vec{F}_2| - |\vec{F}_1| = 0$

(g) Nenhuma das opções anteriores

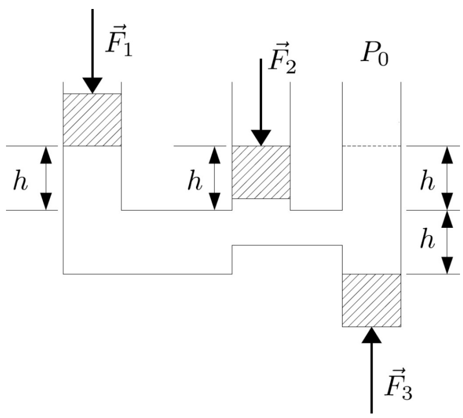

Figura 1: Questão 1.

Gabarito 1: Como o sistema está em equilíbrio (hidrostático) as forças aplicadas são constantes e dadas por $F_i = P_i A$, onde A é a área da seção reta dos êmbolos e P_i, a pressão na base de cada êmbolo relativo à $\vec{F}_i$. A pressão no interior do fluido será descrita pela lei de Stevin para um líquido sujeito à ação do campo gravitacional terrestre. Se escolhermos a origem do sistema de coordenadas no nível da superfície livre do líquido, sujeita à ação de P_0, e a orientação do eixo vertical a favor da gravidade, a lei de Stevin implica que

$$P_1 = P_0, \quad P_2 = P_0 + \rho g h', \quad P_3 = P_0 + 2\rho g h,$$

onde h' é altura do êmbolo e não está mostrada na figura! Assim, $P_3 > P_2 > P_1 \Rightarrow |\vec{F}_3| > |\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$.

Questão 2. *[Moysés 2 - Exercício 1.15] Numa corrida de garçons, cada um deles tem de levar uma bandeja com um copo de chope, sem colarinho, de* 10cm *de diâmetro, cheio até uma distância de* 1cm *do topo, sem permitir que ele se derrame. Supondo que, ao dar a partida, um garçom acelere o passo uniformemente com aceleração a até atingir a velocidade final, mantendo a bandeja sempre na horizontal, qual é o valor máximo de a admissível?*

Gabarito 2: Considere um copo em formato cilíndrico e um referencial dextrogiro $Oxyz$, cujo eixo vertical é orientado contra a aceleração da gravidade $\vec{g}$ e localizado no centro de massa do líquido quando este está parado. O líquido é suposto possuir densidade ρ uniforme. Quando o recipiente é posto em movimento com aceleração $\vec{a} = a\hat{y}$, cada parte do líquido de massa infinitesimal dm está sujeita à uma força (não-inercial) $d\vec{F} = -dm\, g\, \hat{z} - dm\, a\, \hat{y}$, com respeito a um referencial que se move com o fluido. Como $dm = \rho dV$, a densidade de força é dada por $\vec{f} := \frac{d\vec{F}}{dV} = -\rho g\hat{z} - \rho a\hat{y}$. Após o líquido reatingir o equilíbrio, a equação de movimento do fluido é $\vec{f} = \nabla p$, onde p é a pressão em um ponto do fluido. Substituindo a expressão para $\vec{f}$ e resolvendo o sistema de equações diferenciais para as três coordenadas do gradiente, obtemos

$$p(y, z) = p_0 - \rho a(y - y_0) - \rho g(z - z_0),$$

onde (y_0, z_0) é um ponto situado na superfície livre do líquido sujeita à p_0 (pressão atmosférica). A inclinação de uma isóbara do líquido será dada pelo coeficiente angular da reta $-\rho ay - \rho gz =$ constante, ou seja, $\text{tg}\theta = -\text{a/g}$. Portanto, o líquido irá derramar se $a/g > (1\text{cm})/(10\text{cm})$, ou seja, quando $a > g/10$.

Questão 3. *Considere um recipiente contendo líquido, em rotação uniforme com velocidade anlgular ω em relação ao eixo vertical z, como na figura 2. Mostre que, ao atingir o equilíbrio, as isóbaras (i.e., as curvas que defininemos pontos de mesma pressão) são parabólicas.*

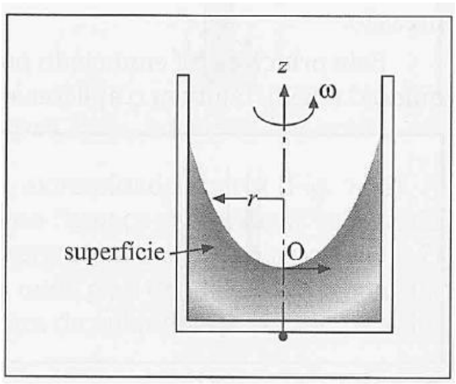

Figura 2: Questão 3.

Gabarito 3: Considerando o referencial O da figura, Cada parte do líquido de massa infinitesimal dm está sujeita à uma força (não-inercial) $d\vec{F} = -dm\, g\, \hat{z} + dm\, \omega^2 r\, \hat{r}$. A densidade de força é dada por $\vec{f} := \frac{d\vec{F}}{dV} = -\rho g \hat{z} - \omega^2 r\, \hat{r}$.

A equação de movimento do fluido é $\vec{f} = \nabla p$, onde p é a pressão em um ponto do fluido. Substituindo a expressão para $\vec{f}$ e resolvendo o sistema de equações diferenciais em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e notando que $\partial p / \partial \theta = 0$, obtemos

$$p(r, z) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - r_0^2) - \rho g(z - z_0),$$

onde (r_0, z_0) é um ponto situado na superfície livre do líquido sujeita à p_0 (pressão atmosférica). As isóbaras do líquido são aquelas que possuem $p(r, z) =$ constante, ou seja, são paraboloides de revolução.

Questão 4. *A densidade de um gás está relacionada com a pressão e a temperatura através da equação de estado para um gás ideal. A temperatura constante, decorre desta lei que a densidade do ar a uma altitude* z *é dada por* $\rho(z)/p(z) = \rho(0)/p(0)$*, onde tomamos* $z = 0$ *como o nível do mar. Deduza que* $p(z) = p(0)\mathrm{e}^{-\lambda z}$*, onde* $\lambda = g\rho(0)/p(0)$*, considerando a temperatura da atmosfera constante em toda a sua extensão. Estime o valor de* λ*.*

Gabarito 4: Supondo a aceleração da gravidade constante e de módulo g, a densidade de força atuante na atmosfera é $\vec{f} = \rho\vec{g}$. Assim, a equação de movimento para a atmosfera é $\frac{dp}{dz} = -\rho g$. Como $\rho(z) = \rho(0)/p(0)p(z)$, obtemos $\frac{dp}{dz} = -g\rho(0)/p(0)p(z)$. Integrando, obtemos $p(z) = p(0)\exp(-\lambda z)$ com $\lambda = g\rho(0)/p(0)$. Considerando a densidade do ar $\rho(0) = 1.226\,\mathrm{Kg/m^3}$ no nível do mar ($z = 0$), à pressão $p(0) = 1\,\mathrm{atm} = 1.03 \times 10^5\mathrm{Pa}$ e a 15ºC; então, $\lambda = 0.12\,\mathrm{Km}^{-1}$.

Questão 5. *Segundo a Agência Nacional de Petróleo (ANP), o etanol fornecido pelas bombas de abastecimentos em postos de combustíveis deve ter uma densidade* ρ_{et} *entre* $0.805 g/cm^3$ *e* $0,811 g/cm^3$. *Para verificar se existe adulteração no combustível, instala-se um densímetro que consiste de um cilindro com duas esferas de densidades diferentes, ligeiramente maior e menor do que* ρ_{et}. *Na figura abaixo podemos ver três amostras de combustível, uma amostra é etanol puro e as outras duas amostras são misturas.*

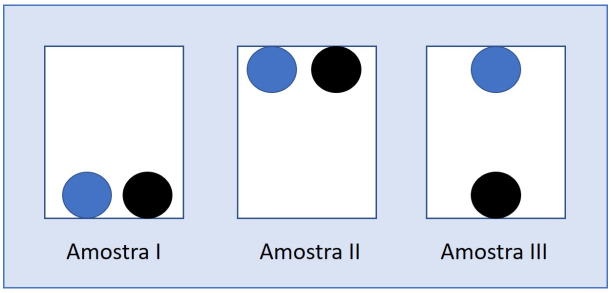

Figura 3: Questão 5.

(a) *Relacione as densidades do etanol e das duas esferas.*

(b) *Qual amostra está dentro dos padrões estabelecido pela ANP? Explique seu raciocínio.*

(c) *Relacione as densidades do etanol e das duas misturas.*

(d) *Considerando a tabela de densidades abaixo, selecione quais são os possíveis líquidos usados para adulterar o etanol nas duas misturas.*

Combustível	Densidade a 20 °C (g/cm^3)
Água	1
Gasolina	0.735
Metanol	0.792

Figura 4: Tabela Questão 5.

Gabarito 5:

(a) A ANP utiliza um densímetro para verificar a pureza do combustível, que por definição é construído com duas esferas de densidades diferentes, ligeiramente maior e menor do que a densidade do líquido de referência. Sendo assim, a amostra que possui estas característica é a amostra III, portanto, a amostra pura. Na amostra III: $\rho_{preta} > \rho_{etanol} > \rho_{azul}$

(b) $\rho_I > \rho_{III} > \rho_{II}$

(c) Considerando que $\rho_I < \rho_{III}$ e $\rho_{II} > \rho_{III}$, temos possivelmente a mistura I composta de etanol e gasolina e a mistura II composta de etanol e água.

Questão 6. *A água flui através de um tubo de Venturi a uma taxa de* $0.5\ m^3/s$*. A pressão na porção mais larga do tubo, com diâmetro* $d_1 = 15\ cm$ *é de* $P_1 = 1.02\ atm$*.* (a) *Determine a pressão* P_2 *na garganta do tubo, ou seja, na porção mais estreita, com diâmetro* $d_2 = 7.5\ cm$*.* (b) *Se acoplássemos um manômetro de mercúrio no tubo de Venturi,qual seria a diferença de altura* h *entre os níveis da coluna de mercúrio?*

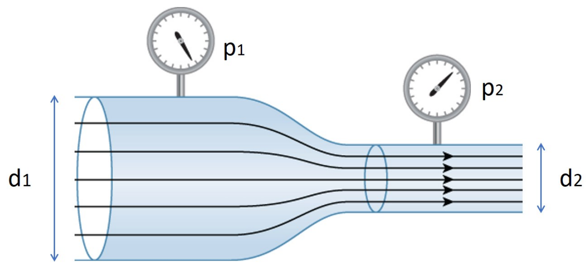

Figura 5: Figura 6

Gabarito 6: (a) Segue diretamente da conservação da vazão, a igualdade:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2, \tag{1}$$

onde, $A_1 = \pi(d_1/2)^2$ e $A_1 = \pi(d_1/2)^2$. Substituindo os valores numéricos, temos:

$$\frac{50}{60} cm^3/s = \pi(3.75)^2 cm^2 v_1 = \pi(7.5)^2 cm^2 v_2 \tag{2}$$

Logo, $v_1 = 0.28$ cm/s e $v_2 = 1.29$cm/s.

A pressão P_2 é calculada aplicando a equação de Bernoulli para uma mesma linha de corrente:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{3}$$

Observação: A pressão deve ser trasformada para Pascal.

(b) Se acoplássemos um manômetro de mercúrio com densidade $\rho_{Hg} = 13600 kg/m$ entre as porções mais larga e mais estreita do tubo de Venturi, dado as pressões p_1 e p_2, podemos calcular a altura h da coluna de mercúrio através da Lei de Stevin:

$$h = \frac{(p_1 - p_2)}{2g} \tag{4}$$

Questão 7 (Moysés 2 - Exercício 2.2). *Um reservatório de paredes verticais, colocado sobre um terreno horizontal, contém água até uma altura h. Se abrirmos um pequeno orifício numa parede lateral,* (a) *A que distância máxima d da parede o jato de água que sai pelo orifício poderá atingir o chão?* (b) *Em que altura deve estar o orifício para que esta distância máxima seja atingida?*

Gabarito 7: Considerando um sistema de coordenadas dextrogiro Oxy orientado contra o sentido da aceleração da gravidade e com $y = 0$ no solo, escrevemos as funções horárias para um volume de fluído que escapa pelo orifício num dado instante de tempo $t_0 = 0$:

$$x(t) = v_x t, \;\; y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2, \;\; v_y(t) = -gt,$$

onde y_0 é a altura do orifício com relação ao solo. Segundo a fórmula de Torricelli, $v_x = \sqrt{2g(h - y_0)}t$. O alcance d é atingido em $y(t) = 0$, ou seja, quando $t = \sqrt{2y_0/g}$, assim, $d = x(\sqrt{2y_0/g}) = 2\sqrt{(h - y_0)y_0}$. Esta distância será máxima se $\partial d/\partial y_0 = 0$, ou seja, se $y_0 = h/2$. Assim seu valor no ponto de máximo $y_0 = h/2$ será $d_{\max} = h$.

Questão 8. *Um sifão é um dispositivo usado para transferir líquidos de um recipiente em um nível mais alto para outro em um nível mais baixo, como mostra a Figura 6. Um fluido de densidade ρ emerge de um orifício do sifão com velocidade v. Calcule:*

(a) Qual a pressão nos pontos A,B,C?

(b) Qual a altura máxima h, necessária para manter o fluxo do fluido pelo sifão?

(c) Qual a velocidade do fluido no ponto C?

(d) Há algum valor máximo ou mínimo para a altura H?

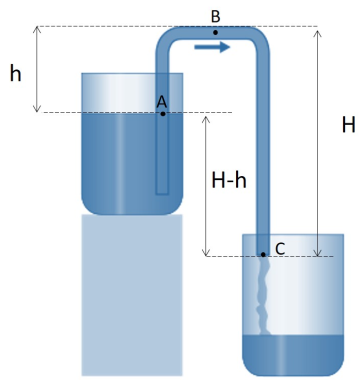

Figura 6: Questão 8.

Gabarito 8:

(a) Os pontos A e C estão em contato com a superfície livre do fluido, logo $p_A = p_C = p_0 = 1$ atm.

A pressão p_B é calculada através da aplicação da equação de Bernoulli nos pontos A e B:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g h_B \tag{5}$$

Sendo a área do reservatório muito maior do que a área do sifão, a velocidade na superfície do líquido é muito pequena, de forma que podemos considerar $v_A = 0$, além disso, considerando a origem do eixo z exatamente no ponto A, $h_A = 0$, podemos escrever:

$$p_B = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho g h \tag{6}$$

(b) Um dos fatores que limitam a altura da coluna do fluido e a velocidade v_B com que o líquido passa pelo ponto B de forma que quanto maior h, menor será a velocidade em B, de forma que a altura será máxima quando $v_B = 0$. Pela equação (6), temos:

$$p_0 = p_B + \rho g h \tag{7}$$

Por esta equação podemos ver que para P_0 se manter constante, quanto maior h, menor deverá ser p_b para manter p_0 constante.

A altura será máxima quando $p_B = 0$ e consequentemente:

$$h_B = \frac{p_0}{\rho g}, \tag{8}$$

ou seja, a altura máxima será a altura em que uma coluna de fluido pode ser elevada pela ação única da pressão atmosférica.

(c) A velocidade em um ponto C é obtida através da aplicação da equação de Bernoulli nos pontos A e C:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 - \rho g h_C \tag{9}$$

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_C^2 - \rho g h_C \tag{10}$$

$$v_C = \sqrt{(2gh_C)} = \sqrt{2g(H-h)} \tag{11}$$